複数投資銘柄の元本割れの確率

Probabilities of Falls under the Purchased Prices of the Invested Stocks

上　野　皓　司
Ueno, Koji

ABSTRACT

The stock price possibly falls under the purchased price after certain period. The falled stock price possibly rises again over the purchased price. What are the probabilities of them. These probabilities are different according to the purchased stocks and markets. These must be recognized beforehand to increase the returns. Poisson processes and queuing theories are applied to calculate them.

株式投資の対象銘柄は現在では国内のみではなく海外の国際的な市場，新興市場，オプションをつけることができる市場等で模索されている。以下では投資銘柄の価格が購入原価を基準にどのように変動するかの予測方法を理論的に検討するが，最初に具体的な株式購入のさいの参考資料として，近年の投資対象市場の状況を概観する。

米国では証券市場の取引方法の改善が試みられているが，その一つが 1997 年 1 月 20 日に実施された SEC（Securities and Exchange Commission）によって実施された Nasdaq と私的な取引市場との相互の競争の導入である。その効果について，Barclay, Christie, Harris, Kandel and Schultz（1999）は，この実施は，市場の質を低下させる事なく買い呼び値と売り呼び値の値幅を劇的に低下させ，市場の改善に大いに寄与した，と分析している。また他の試みとして 1987 年 5 月 18 日に始まった Nasdaq と CHX（Chicago Stock Exchange）との重複取引（dual trading）の実施がある。これは Nasdaq の選り抜き銘柄を CHX でも同時

に売買することができるようにしたものであるが，Ness, Ness, and Pruitt (1999) はこの実施も対象銘柄の買い呼び値と売り呼び値の値開きを縮小し，初期の目標をほぼ達成したと評価している。

最近は新興株式市場（emerging equity markets）の市場の自由化，すなわち市場規制の緩和，各国の基金等の導入，市場内での株式の流れの改善，等が注目されているが，Bekaert and Harvey (2000) は新興株式市場の自由化は資本調達費用の削減に寄与し，一般に危惧されている外国人投機家の影響はさほど重要ではないと分析し，Henry (2000) はアルゼンチン，ブラジル，チリ，コロンビア，インド，韓国，マレーシア，メキシコ，フィリピン，台湾，タイ，ベネズエラの 12 の新興株式市場を調査し，株式市場の自由化を実施するまでの 8 ヵ月の間に月平均で 3.3％の異常な収益（abnormal returns）を上げている，と述べている。また Ojah and Karemera (1999) はラテン・アメリカの新興市場，アルゼンチン，ブラジル，チリ，メキシコの株価を 1987 年から 1997 年まで調査し，これらの株価はランダム・ウオーク（random walk）であり，過去の収益データ等は将来の予測の参考にはならない，と分析している。

Bekaert and Harvey (2000) によれば新興株式市場の最初の公式の自由化（official liberalization）の日時は，アルゼンチンは 1989 年 11 月，ブラジルは 1991 年 5 月，チリは 1992 年 1 月，コロンビアは 1991 年 2 月，ギリシャは 1987 年 12 月，インドは 1992 年 11 月，インドネシアは 1989 年 9 月，ヨルダンは 1995 年 12 月，韓国は 1992 年 1 月，マレーシアは 1988 年 12 月，メキシコは 1989 年 5 月，ナイジェリアは 1995 年 8 月，パキスタンは 1991 年 2 月，フィリピンは 1991 年 6 月，ポルトガルは 1986 年 7 月，台湾は 1991 年 1 月，タイは 1987 年 9 月，トルコは 1989 年 7 月，ベネズエラは 1990 年 1 月，ジンバブエは 1993 年 6 月である。

現在米国ではオプション市場が著しく発展している。このオプションは原資産である株式とどのように連動しているであろうか。Jennings and Starks (1986) は株式収益の公表による株価の調整がオプションを有している株式ではオプションを有していない株式より迅速であり，株式についての情報がオプショ

ン市場を通して効率的に流布される，と分析している。また Kalay and Subrahmanyam（1984）は原株式が配当落の日（ex-dividend day）にその株式につけられたオプション価格がどのように変化するかを分析し，配当のついている間に株式を売りつける権利であるオプションのショートを売り，配当落後にそれを買い戻せば利益が上がるが，何故かこ方法が採用されず，配当落はオプション市場ではあまり重視されていない，と説明している。株式市場ではときには大口単位取引（block trade）がみられるが，Kumar, Sarin and Shastri（1992）はこの大口単位取引前後の株式市場とオプション市場への影響を直近値より高い取引価格（uptick）と直近値より低い取引価格（downtick）にわけて検討し，前後 15 分から 30 分の間はなんらかの波紋が生じると述べている。Sorescu（2000）は 1980 年から 1981 年の間に生じたオプション市場の変化を指摘し，1973 年から 1980 年まではオプションに異常な収益が生じ，1981 年以後は逆に大幅に損失が発生するようになった，と述べている。

企業の経営や資産状況が株価に反映されるが，Holderness, Kroszner, and Sheehan（1999）は所有と経営の分離がどのように変化しているかを株式が公的に売買されている 1935 年の 1500 社と 1995 年の 4200 社について比較検討し，経営者によって所有されている企業は 1935 年には 13％，1995 年には 21％であり，現在のほうが経営者によって所有されている企業が増大している，と述べている。経営者によって所有されている企業の株価とそうでない企業の株価との動きの差異については明らかではないが，それぞれの特徴は注目する必要がある。株価は一般にその企業の資産価値をも表しているが，銘柄を比較すれば一株当たりの資産の簿価（book value）と株価の比率は多様に異なっている。この一株当たりの簿価と市場での株価の比率で銘柄を比較すれば，長期的に一株当たりの簿価が市場での株価に対する比率が高い銘柄が，一株当たりの簿価が市場での株価に対する比率が低い銘柄より高い平均収益を生み出すということが見出されている。Davis, Fama, and French（2000）は 1929 年から 1997 年まで米国の NYSE や AMEX, Nasdaq に上場されている企業を大型株（big stocks）

と小型株（small stocks）に分け，この点をさらに検討している。この帳簿と市場の比率（book-to-market ratios）は株価の長期的な価格に影響を及ぼすために，十分に考慮される必要がある。また企業には一般にそれぞれの時期に適正な事業規模が存在し，資本投資による拡大と，投資の回収による縮小，のバランスが適正な規模と収益を決定する。Abel, Dixit, Eberly, and Pindyck（1996）は，資本投資による拡大をコール・オプション，投資の回収による縮小をプット・オプションと位置づけ，二つのオプションの相互関係を分析している。適正な事業規模や収益の維持は株価にも反映され，行き過ぎた投資の拡大は将来の株価の低下をもたらすために，不適切な増資や事業の拡大には十分に留意する必要がある。

株価は上記のような点以外に経済全体や市場，個々の経営や業績等の多様な影響を受ける。以下では特定の投資家を想定し，それぞれの市場で購入した銘柄の価格がどのように推移するかを，一般的，理論的に検討する。

1. 投資銘柄の状況

購入銘柄の状況を分析するために，次のような仮定を設ける。⑴個々の銘柄にほぼ同額を投資し，複数銘柄を購入している。⑵個々の銘柄が購入した価格より低下する可能性は不確定であるが，その可能性はポアソン過程で表される。⑶購入した価格より低下した銘柄は再び購入価格を越えて上昇することがあるが，この可能性は確率変数である。

以上の仮定のもとで購入銘柄について以下のような点について検討することができる。①購入銘柄数が n，②購入価格以下に低下する可能性が $\lambda(t)$，③購入価格以下に低下した銘柄が再び購入価格を越える確率が $\Phi(t)$，で表されるとき，⑴ある時点に購入価格以下に低下した銘柄数が k である確率はどの程度であろうか。⑵ある時点に購入価格以下に低下している銘柄数の確率は，k の数によってどのように変化するであろうか。⑶購入価格以下に低下している銘柄数の確率は購入数 n によってどのように変化するであろうか。

⑴は購入した銘柄数が n 個あり，ある時点に $k(\leqq n)$ の購入価格以下に低下した銘柄数の確率を，⑵は購入価格以下に低下した銘柄数の確率が k の値が変化すればどのように変わるかを，⑶は，⑴から⑵が，購入銘柄数 n が異なればどのように変わるかを，問題にしている。以下ではこれらの点について検討する。(1)

2. 購入価格以下に低下した銘柄数の確率

以下では「待ち行列の理論」に使用される数式を使用して，問題を定式化する。購入価格以下に低下した銘柄数と，購入価格以下に低下した銘柄数が購入価格以上に復帰する数等を関連づけ，検討のために必要な確率を求める。

2－1. 購入銘柄の価格の状況の数式的表現

任意の時刻に，購入銘柄の価格の状況は，次の（$n+1$）の状況のいずれかである。⑴いずれの銘柄も購入価格以下に低下していない。この状況を A_0 と表す。⑵一つの銘柄は購入価格以下であるが，他はすべて購入価格以上である：A_1。⑶ ……，（$n+1$）n 個の銘柄がすべて購入価格以下に低下している：A_n。

ある時刻 $t=t_0$ に状況が A_k であれば，この時刻 t_0 以後の銘柄の価格の状況は以下の 3 要因によって決まる。すなわち

〈1〉 購入銘柄が購入価格以下に低下する時点，

〈2〉 時刻 t_0 に，既に購入価格以下に低下した銘柄が，再び購入価格以上に復帰する時点，

〈3〉 時刻 t_0 以後に購入価格以下に低下する銘柄が再び購入価格に復帰するため

（1） 株式の売買は自己の判断以外にニュース・レター等に依拠することがある。ニュース・レターの情報の多くは必ずしも信頼できないという調査があるが，バリュウ・ライン投資調査（Value Line Investment Survey）はこれまでその予測の正しさによってバリュウ・ラインの謎（Value Line Enigma）と呼ばれている。Broughton, and Chance（1993）はバリュウ・ライン・オプションズ（Value Line Options）によりその情報の正しさやその推薦にしたがって売買したときの利益の状況を事後的に分析し，ある程度の評価を行っている。バリュウ・ラインの推薦にしたがえば，銘柄が購入価格以下に低下する確率や，購入価格以下に低下した銘柄が購入価格以上に復帰する確率がどの程度になるか，興味深い点である。

に必要な時間の長さ。

ここで次のような状況を想定する。

(1) 購入価格以下に低下する銘柄の価格の可能性の頻度 $\lambda(t)$ はポアソン過程であり，一定時間 t の間に価格が購入価格以下に低下する銘柄数 η の確率は，銘柄数 0 については，

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

から，1 以上については

$$P_\eta(t) = \{(\lambda t)^\eta / \eta!\} e^{-\lambda t}$$

から計算される(2)。時刻 t_0 以前の購入価格以下への銘柄価格低下の頻度は，時刻 t_0 以後の購入価格以下への銘柄価格低下の頻度には関係しない。すなわち「マルコフ過程」である。

(2) 購入価格以下に低下した銘柄の購入価格以上に復帰する可能性は確率変数で，一定時間を t とすれば，購入価格に復帰する確率の分布関数は $\Phi(t)$ で表される。この分布関数 $\Phi(t)$ は $\mu(>0)$ を定数として，

$t \leqq 0$ のときは $\Phi(t) = 0$,

$t > 0$ では $\Phi(t) = 1 - e^{-\mu t}$

と表されることができる(3)。この分布関数は，もし与えられた時間 t が長ければ，購入価格に復帰する確率の分布関数 $\Phi(t)$ は大きくなり，時間 t が短ければ，購入価格に復帰する確率の分布関数 $\Phi(t)$ は小さくなる，ことを表している。またこの指数分布の性質によって，既に購入価格以下に低下している銘柄の時刻 t_0 以後購入価格に復帰するために要する時間の長さは，t_0 まで続いてきた購入価格

(2) これらの分布はポアソン過程で良く近似されることが知られている。購入価格以下に低下する銘柄の価格の可能性の頻度は，購入価格以下に低下する銘柄数によって異なった確率であれば，$\lambda_\eta(t)$ と表されるが，ここでは購入価格以下に低下する銘柄数 η にかかわらず常に一定値 $\lambda(t)$ であると仮定する。

(3) 他の形でも表現可能であるが，このような指数分布によって表されることが多い。購入価格以下に低下した銘柄の購入価格以上に復帰する可能性は，購入価格以上に復帰する銘柄の数によって異なり，復帰する銘柄数を k とすれば，一般的には $\Phi_k(t) = 1 - \exp(-\mu t)$ と表せるが，ここでは購入価格以上に復帰する銘柄数にかかわらず常に一定値 μ であると仮定する。

に復帰する時間の長さに依存せず，t_0 以後に購入価格以下に低下する銘柄の購入価格に復帰する時間の長さは，t_0 までどのように復帰が行われてきたかに依存しない。すなわち銘柄の購入価格への復帰についても「マルコフ過程」が想定されている。(4)

2－2. 購入価格以下に低下した銘柄数の状況の確率

時刻 t に購入価格以下に低下した銘柄数の状況が A_k である確率を $p_k(t)$ と表す。最初に時刻 $t+h$ に購入価格以下に低下した銘柄数の状況が A_0 の確率を求める。この状況は次の三つの場合に起こりうる。①時刻 t にどの銘柄も購入価格以下に低下していなかったが，時間 h の間に新たな購入価格以下への低下がなかった。②時刻 t に一つの銘柄が購入価格以下に低下していたが，その銘柄の購入価格以上への復帰が時刻 $t+h$ までに終了し，その間に新たに購入価格以下へ低下した銘柄が存在しなかった。③上記以外の状況，すなわち時刻 t に二つの購入価格以下に低下した銘柄が存在していたが，時刻 $t+h$ までにそれらの購入価格以上への復帰が終了する，時刻 t に三つの購入価格以下に低下した銘柄が存在していたが，時刻 $t+h$ までにそれらの購入価格以上への復帰が終了する，等。

①の確率は，

$$p_0(t)e^{-\lambda h}=p_0(t)\{1-\lambda h+\delta(h)\}$$

で，②の確率は，

$$p_1(t)e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})=p_1(t)\mu h+\delta(h)$$

であり，二つの式の $\delta(h)$ は，時間 h を短くとったときの微小な値をあらわしており，それぞれ異なった値である。(5) ③の確率は時間 h を短く取れば，上記とは異

（4）取引の少ない銘柄はかなりの期間売買が不成立であったり意外な価格の変化を示すことがある。買い呼び値（bid price）と売り呼び値（asked price）の値開き（spreads）が大きいことがその主要な要因である。したがって市場での取引状況によって価格の変化が大きく影響されるが，Goldstein and Nelling（1999）は Nasdaq 市場でマーケット・メーカー（market makers）の数と取引の状況を分析し，マーケット・メーカーの数が増加すれば取引頻度（trading frequency）が増大し，買い呼び値と売り呼び値の値開き（bid-ask spreads）を減少させると説明している。

なる微小な確率 $\delta(h)$ で表すことができる。

時刻 $t+h$ にどの銘柄も購入価格以下に低下していない確率は，上記の①，②，③の確率を合計すればよく，微小な値をひとまとめに $\delta(h)$ と表せば，

$$p_0(t+h)=(1-\lambda h)p_0(t)+\mu h p_1(t)+\delta(h) \tag{1}$$

である。(1) はまた

$$\{p_0(t+h)-p_0(t)\}/h=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)+\delta(h) \tag{2}$$

と表されることができ[6]，h を極限にまで小さくすれば，すなわち $h\to 0$ にとれば，(2) は

$$dp_0(t)/dt=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \tag{3}$$

になる[7]。

それでは $1\leqq k\leqq n$ のときはどうであろうか。以下の計算ではある銘柄が購入価格以下に低下し他の銘柄が購入価格以上に復帰する，といった二つの状況の同時的な発生確率は，時間 h を短くとっているためにいずれの発生確率も低く，二つを乗じた確率はきわめて低いために，微小確率 $\delta(h)$ に含まれる。したがっていずれか一つの事象の発生のみの確率を計算する。時刻 t に k の購入価格以下に低下した銘柄が存在している状況は三つの場合に起こり，それぞれの確率は以下ようになる。

①時刻 t に $k-1$ の購入価格以下に低下した銘柄が存在し，時間 h の間に新たな一つの銘柄が購入価格以下に低下する確率。②時刻 t に k の購入価格以下に

↙(5) これらの式の導き方は以下のようである。テイラー級数により展開すれば

$$e^{-\lambda h}=1-\lambda h+\lambda^2h^2/2-\lambda^3h^3/6+\cdots, \tag{1}$$

$$e^{-\mu h}=1-\mu h+\mu^2h^2/2-\mu^3h^3/6+\cdots, \tag{2}$$

であり，上の式は，(1) の右辺の $(\lambda^2h^2/2-\lambda^3h^3/6+\cdots)$ を微小な確率 $\delta(h)$ で置き換えることにより得られる。下の式は，$e^{-\lambda h}$ を $1-\lambda h$，$e^{-\mu h}$ を $1-\mu h$ で近似すれば，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h}) &\fallingdotseq \{e^{-\lambda h}-e^{-(\lambda+\mu)h}\} \\ &\fallingdotseq (1-\lambda h)-\{1-(\lambda+\mu)h\} \\ &\fallingdotseq \mu h \end{aligned}$$

であり，テイラー級数の残りの部分に対する確率を $\delta(h)$ で表している。

(6) 計算上は (2) の右辺第3項は $\{\delta(h)/h\}$ であるが，微小な値はすべて $\delta(h)$ で表している。

(7) $\delta(h)$ は，$h\to 0$ では 0 になる。

低下した銘柄が存在し，時刻 $t+h$ に購入価格以下に低下する銘柄が存在しない確率から，購入価格以下に低下せず時刻 $t+h$ に購入価格以上に復帰する銘柄の確率を差し引いた確率。③時刻 t に $k+1$ の購入価格以下に低下した銘柄が存在していたが，時刻 $t+h$ までに購入価格以下に低下する銘柄が存在せず一つの銘柄で購入価格以上に復帰する確率。④上記以外の状況，すなわち時刻 t に $k+2$ の購入価格以下に低下した銘柄が存在していたが，時刻 $t+h$ までに二つの銘柄で購入価格以上に復帰する確率，時刻 t に $k+3$ の購入価格以下に低下した銘柄が存在していたが，時刻 $t+h$ までに三つの銘柄で購入価格以上に復帰する確率，等。

①の確率は(8)

$$p_{k-1}(t)\lambda he^{-\lambda h}=p_{k-1}(t)\{\lambda h+\delta(h)\},$$

②の確率は，

$$p_k(t)\{e^{-\lambda h}-e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})\}=p_k(t)\{1-\lambda h-\mu h\}+\delta(h),$$

③の確率は

$$p_{k+1}(t)e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})=p_{k+1}(t)\mu h+\delta(h),$$

④の確率は $\delta(h)$ と表すことができる。

①から④の確率を合計すれば，

$$p_k(t+h)=\lambda hp_{k-1}(t)+(1-\lambda h-\mu h)p_k(t)+\mu hp_{k+1}(t)+\delta(h) \tag{4}$$

となり，整理すれば，

$$\{p_k(t+h)-p_k(t)\}/h=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+\mu)p_k(t)+\mu p_{k+1}(t)+\delta(h) \tag{5}$$

であり，h を 0 に近づければ，$h\to 0$ の極限値として

$$dp_k(t)/dt=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+\mu)p_k(t)+\mu p_{k+1}(t) \tag{6}$$

の方程式を得ることができる。

(8) ポアソン過程の計算では
$p_{k-1}(t)\lambda he^{-\lambda h}=p_{k-1}(t)\lambda h\{1-\lambda h+\delta(h)\}$,
であるが，右辺を $p_{k-1}(t)\{\lambda h+\delta(h)\}$ で近似している。

2−3. 方程式の解法

上記の二つの方程式（3），(6)，は，購入価格以下に低下した銘柄数が，0, k である場合の時刻 t での確率の変化の状態を表している。購入価格以下に低下した銘柄数の確率は時刻 $t=0$ のときの初期条件として，

$$k=0 \text{ のときは, } p_0(0)=1,\ k \geqq 1 \text{ のときは, } p_k(0)=0$$

を仮定することができる。これらの条件は初期時点 $t=0$ には購入価格以下に低下している銘柄が存在していなかったことを表している。また任意の時刻 $t(\geqq 0)$ に購入価格以下に低下した銘柄数の確率の和は1である，という条件

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)=1 \tag{7}$$

が成立している。

購入価格以下に低下している銘柄数の確率は，上記の二つの方程式（3），(6) と（7）より導くことが可能であるが，二つの方程式（3），(6) は微分−差分混合方程式である。この式の解は $p_k(t)$ の極限値を考えることによって得ることができる。すなわち $t\to\infty$ では $p_k(t)$ はこれ以上変化しない極限値 p_k となり，

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t)=p_k$$

と表されるが[9]，このとき方程式（3），(6) の左辺の値は0で，

$$-\lambda p_0+\mu p_1=0 \quad (k=0), \tag{8}$$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+\mu)p_k+\mu p_{k+1}=0 \quad (1\leqq k\leqq n) \tag{9}$$

が成立し，(10) は

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=1 \tag{10}$$

となる。

方程式（8），(9)，(10) を解けば p_k が得られるが，

$$X_k=-\lambda p_k+\mu p_{k+1}$$

と置けば，(8)，(9) は

$$X_0=0\ (k=0),\ X_{k-1}-X_k=0 \quad (1\leqq k\leqq n)$$

(9) このような変化がなくなった状態は「平衡状態」，この状態のときの二つの方程式（3），(6) は「平衡方程式」，と呼ばれる。

となる。これより $X_k=X_{k-1}=X_0=0$ であるために，すべての $k(0\leqq k\leqq n)$ に対して $X_k=0$ となる。ここで購入価格以下に低下する頻度が銘柄数 k によって異なり λ_k，購入価格以下に低下した銘柄が購入価格以上に復帰する確率が購入価格以下に低下した銘柄数 k によって異なり μ_k と表されれば，(8) と (9) はより一般的な式

$$-\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1=0 \quad (k=0), \tag{11}$$

$$\lambda_{k-1}p_{k-1}-(\lambda_k+\mu_k)p_k+\mu_{k+1}p_{k+1}=0 \quad (1\leqq k\leqq n) \tag{12}$$

となり，

$$X_k=-\lambda_k p_k+\mu_{k+1}p_{k+1}=0 \tag{13}$$

の関係が得られる。

(13) から

$$-\lambda_{k-1}p_{k-1}+\mu_k p_k=0 \tag{14}$$

が得られ，

$$p_k=(\lambda_{k-1}/\mu_k)p_{k-1} \tag{15}$$

となる。(15) から p_k を初期値 p_0 と関連づければ，

$$p_k=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)p_0 \tag{16}$$

が得られる。(10) より

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=p_0+\sum_{k=1}^{n}p_k=1$$

であり，(16) を代入すれば，

$$p_0+\sum_{k=1}^{n}p_k=p_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)p_0=1$$

が得られ，定数 p_0 の値は

$$p_0=\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right\}^{-1} \tag{17}$$

となり，定数 λ_{i-1} や μ_i より得られる。

2−4. 購入価格以下に低下した銘柄数の全体的な確率

時間［t, $t+h$）の間にそれぞれの銘柄が購入価格以下に低下する確率は相互に独立であり，個々の確率は $\lambda h+\delta(h)$ である。また購入価格以下に低下した銘柄が時間［t, $t+h$）の間に購入価格以上に復帰する確率は相互に独立であり個々の確率は $\mu h+\delta(h)$ である。このような状況のもとである時刻 t に k 個（$0 \leqq k \leqq n$）の銘柄が購入価格以下に低下している状況 A_k の確率は，平衡状態ではどのような値になるであろうか。

ここで銘柄数 k が購入価格以下に低下している状況のもとで，時間［t, $t+h$）の間に新たに別の銘柄が購入価格以下に低下する確率は $\lambda(k)$ と表すことができ，$\lambda(k)$ は

$$\lambda(k)=(n-k)\lambda \quad (0 \leqq k \leqq n)$$

である。また購入価格以下に低下した銘柄が時間［t, $t+h$）の間に購入価格以上に復帰する確率は，購入価格以下に低下した銘柄数が k のもとでは，$\mu(k)$ と表すことができ，

$$\mu(k)=k\mu \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

である。したがって k 個の銘柄が購入価格以下に低下している状況 A_k の確率は，(12) より，

$$p_k=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)p_0 \tag{16}$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$$

であるが，購入している全銘柄数については，$n!／\{k!(n-k)!\}$ の組合せが存在する[(10)]。したがって全銘柄数について k 個が購入価格以下に低下している確率 P_k は

(10) 全銘柄が購入価格以下になる可能性があるが，ここでは n 個のうち k 個の銘柄が購入価格以下に低下する可能性は ${}_nC_k={}_nP_k／k!=n!／\{k!(n-k)!\}$ である。

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \quad (1 \leqq k \leqq n) \tag{18}$$

となる。

また個々の銘柄について，(17) から p_0 は

$$p_0 = \left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\right\}^{-1} \tag{17}$$

$$= \left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right\}^{-1}$$

であり，この p_0 は全銘柄について p_k と同様に $n!／\{k!(n-k)!\}$ の可能性がある。また $k=0$ のとき

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 0$$

であるために，全銘柄についての p_0 は

$$p_0 = \left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right\}^{-1} \tag{19}$$

となる。

3. 問題の検討

以上の数式にもとづいていくつか数値例を考える。購入価格以下に低下する銘柄の頻度 $\lambda(t)$ はポアソン過程であり，一定時間 t の間に購入価格以下に低下する銘柄の確率は，低下した銘柄数 0 については，$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ から，1 以上については $P_\eta(t) = \{(\lambda t)^\eta／\eta!\}e^{-\lambda t}$ から計算される。また購入価格以下に低下した銘柄の購入価格以上に復帰する可能性は確率変数 $\Phi(t)$ で表され，一定時間 t には，$\mu(>0)$ を定数として，$t \leqq 0$ のときは $\Phi(t)=0$，$t>0$ では $\Phi(t) = 1-e^{-\mu t}$ から計算される。したがって購入価格以下に低下する銘柄の可能性は λ が大きいほど高まり，購入価格以下に低下した銘柄の購入価格以上に復帰する可能性についても μ が大きいほど高まる。$\omega = \lambda／\mu$ は，λ が大きいほど，また μ

が小さいほど，大きな値をとる。購入価格以下に低下する可能性が高く購入価格以上に復帰する可能性が低ければ，ω は大きくなり，この ω は「購入価格以下に低下した銘柄の購入価格以下での停滞の指標」である。(16) から (19) の確率は，$n, \lambda, \mu, \omega=\lambda/\mu$，等の値によって変化する。以下では $n, \lambda, \mu, \omega=\lambda/\mu$，にいくつかの数値を想定し，問題を検討する。

3－1. 購入価格以下に低下した銘柄の数による確率

最初の問題(1)の購入した銘柄数が n 個あり，ある時点に $k(\leqq n)$ 個の銘柄が購入価格以下に低下している確率を計算する。λ が大きいほど購入価格以下に低下する可能性が高まり，μ が大きいほど購入価格に復帰する可能性が高まるが，$\omega=\lambda/\mu$ の値は，λ と μ の相対的な大きさによって変化し，λ と μ がどのような値をとろうと λ/μ が一定の比率であれば，(16) から (19) の値は同一であるために，以下ではまず ω の値を想定し，問題を考える。

一例として購入している銘柄数が $n=6$ であるとき，購入価格以下に低下した銘柄数がある時点に $k=0$ から $k=6$ にある確率はどのような値をとるであろうか。この確率は (18) と (19) から計算されるが，ω の値によって変化するために，$\omega=0.5$, $\omega=0.7$, $\omega=1.0$, $\omega=2.0$ の四つの値について計算する。[11]

$\omega=0.5$ の場合を計算すれば以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0.0878	0.2634	0.3293	0.2195	0.0823	0.0165	0.0014

$\sum P_k=1.0002$ となるのは小数点以下5桁未満を4捨5入しているためである。

---

(11) これらの値の計算は次の二式から求められる。

$$P_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\omega^k P_0,\quad (1\leqq k\leqq n) \tag{18}$$

$$P_0=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\omega^k\right\}^{-1}。$$

ここで $0!=1$ と定義されている。

$\omega=0.5$ では，$k=0$ でどの銘柄も購入価格以下に低下していない確率は 0.0878，一つの銘柄が購入価格以下に低下している確率は 0.2634，二つの銘柄が購入価格以下に低下している確率は 0.3293，6 銘柄すべてが購入価格以下に低下している確率は 0.0014 である。ω の値が 0.5 と低い値のときは，k が 1 から 3 のときに確率が大きくなる。$\omega=\lambda/\mu$ は，λ が大きいほど，また μ が小さいほど，大きな値をとるが，$\omega=0.5$ のときは購入価格以下に低下する可能性が低く，購入価格以下に低下している銘柄が購入価格以上に復帰する可能性が高いために，購入価格以下に低下している銘柄数の可能性が低くなっている。

$\omega=0.7$ の場合を計算すれば以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0.0414	0.1739	0.3043	0.2840	0.1491	0.0417	0.0049

$\sum P_k=0.9993$ となるのは小数点以下 5 桁未満を 4 捨 5 入しているためである。$\omega=0.7$ では，$k=2$ が 0.3043，$k=3$ が 0.2840，$k=4$ が 0.1491 で，$\omega=0.5$ の場合と比べて購入価格以下に低下している銘柄数が増加すると確率が増大する。

$\omega=1.0$ では以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0.0156	0.0938	0.2344	0.3125	0.2344	0.0938	0.0156

$\omega=1.0$ では $k=3$ のときの確率が最も高くなっている。$\omega=1.0$ は購入価格以下に低下する可能性 λ と，購入価格以下に低下した銘柄が購入価格以上に復帰する可能性 μ が等しい状況であり，$k=3$ の値を頂点に $k=2$ と $k=4$，$k=1$ と $k=5$，$k=0$ と $k=6$ が同じ確率になっている。

$\omega=2.0$ では以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0.0014	0.0165	0.0823	0.2195	0.3292	0.2634	0.0878

$\omega=2.0$ では，$k=4$ のときの確率が 0.3292 で最も高くなっている。$\omega=2.0$ は購入価格以下に低下する可能性 λ が，購入価格以下に低下した銘柄が購入価格以上に復帰する可能性 μ の 2 倍であり，購入価格以下に低下する可能性が高く，

購入価格以下に低下した銘柄が購入価格に復帰する可能性が低い状況であり，$k=6$ が 0.0878 と増大している。

ω の値が異なれば p_k がどのように変化するかをまとめて示せば，以下のようになる。

k	0	1	2	3	4	5	6
$\omega=0.5$	0.0878	0.2634	0.3293	0.2195	0.0823	0.0165	0.0014
$\omega=0.7$	0.0414	0.1739	0.3043	0.2840	0.1491	0.0417	0.0049
$\omega=1.0$	0.0156	0.0938	0.2344	0.3125	0.2344	0.0938	0.0156
$\omega=2.0$	0.0014	0.0165	0.0823	0.2195	0.3292	0.2634	0.0878

これらの値をみれば⑴の問題,「ある時点に購入価格以下に低下した銘柄数が k である確率はどの程度であろうか。」は，$k=0, 1, \cdots, 6$ のこれらの値を読めばよく，⑵の「ある時点に購入価格以下に低下している銘柄数の確率は，k の数によってどのように変化するであろうか。」は，k の各値を比較すればよく，ω の値が異なれば，k の各値に対応する確率は変化する。

3−2. 購入銘柄数による購入価格以下に低下した銘柄数の確率

購入した銘柄数が全部で 10 個あるとき，すなわち $n=10$ のとき，上記と同じ ω の各値に対する確率はどのような値をとるであろうか。以下はその計算結果である。括弧内の数値は上記で計算した購入銘柄数が 6 の場合である。[12]

(12) $k=10$ の場合，確率の合計は，$\omega=0.5$ では 0.9999，$\omega=0.7$ では 1.0001，$\omega=1.0$ では 1.0001，$\omega=2.0$ では 0.9999 である。

	$\omega=0.5$	$\omega=0.7$	$\omega=1.0$	$\omega=2.0$
$k=0$	0.0173 (0.0878)	0.0050 (0.0414)	0.0010 (0.0156)	0.0000 (0.0014)
$k=1$	0.0867 (0.2634)	0.0347 (0.1739)	0.0098 (0.0938)	0.0003 (0.0165)
$k=2$	0.1950 (0.3293)	0.1094 (0.3043)	0.0439 (0.2344)	0.0030 (0.0823)
$k=3$	0.2601 (0.2195)	0.2042 (0.2840)	0.1172 (0.3125)	0.0163 (0.2195)
$k=4$	0.2276 (0.0823)	0.2501 (0.1491)	0.2051 (0.2344)	0.0569 (0.3292)
$k=5$	0.1365 (0.0165)	0.2101 (0.0417)	0.2461 (0.0938)	0.1366 (0.2634)
$k=6$	0.0569 (0.0014)	0.1226 (0.0049)	0.2051 (0.0156)	0.2276 (0.0878)
$k=7$	0.0163	0.0490	0.1172	0.2601
$k=8$	0.0030	0.0129	0.0439	0.1951
$k=9$	0.0003	0.0020	0.0098	0.0867
$k=10$	0.0000	0.0001	0.0010	0.0173

⑴の問題,「ある時点に購入価格以下に低下している銘柄数が k である確率はどのような値をとるであろうか。」は，購入銘柄数が変化すれば同じ ω や k の値でも確率の値がかなり異なることがわかる。例えば $k=2$ の値をみれば $\omega=0.5$ では $n=10$ では 0.1950, $n=6$ では 0.3293, $\omega=2.0$ では $n=10$ では 0.0030, $n=6$ では 0.0823 であり，$k=6$ の値をみれば $\omega=0.5$ では $n=10$ では 0.0569, $n=6$ では 0.0014, $\omega=2.0$ では $n=10$ では 0.2276, $n=6$ では 0.0878 であり，かなりの差異がある。

⑵の問題は ω の各値に対応して縦に k の変化による確率をみれば明らかであり，$\omega=0.5$ では，$n=6$ では $k=2$ で最大値 0.3293, $n=10$ では $k=3$ で最大値 0.2601 を，$\omega=0.7$ では，$n=6$ では $k=2$ で最大値 0.3043, $n=10$ では $k=4$ で最大値 0.2501 を，$\omega=1.0$ では，$n=6$ では $k=3$ で最大値 0.3125, $n=10$ では $k=5$ で最大値 0.2461 を，$\omega=2.0$ では，$n=6$ では $k=4$ で最大値 0.3292, $n=10$ では $k=7$ で最大値 0.2601 をとる。

⑶の問題は $n=6$ と $n=10$ を ω の各値について全体的に比較すればよく，$n=10$ では銘柄数に応じて確率の値がなだらかになる。$\omega=0.5$ と $\omega=2.0$ を比較すれば，k の値に対応して $n=6$ と $n=10$ では確率の比率が大きく異なっている。

参考文献

Abel, Andrew B., Avinash K. Dixit, Janice C. Eberly, and Robert S. Pindyck, “Options, the Value of Capital, and Investment”, Quarterly Journal of Economics, 111（1996）, 753-77.

Barclay, Michael J., William G. Christie, Jeffrey H. Harris, Eugene Kandel and Paul H. Schultz, “Effects of Market Reform on the Trading Costs and Depths of Nasdaq Stocks”, 54（1999）, 1-34.

Bekaert, Geert and Campbell R. Harvey, “Foreign Speculators and Emerging Equity Markets”, Journal of Finance, 55（2000）, 565-613.

Broughton, John B. and Don M. Chance, “The Value Line Enigma Extended: An Examination of the Performance of Option Recommendations”, Journal of Business, 66（1993）, 541-69.

Davis, James L., Eugene F. Fama, and Kenneth R. French, “Characteristics, Covariances, and Average Returns: 1929 to 1997”, Journal of Finance, 55（2000）, 389-406.

Goldstein, Michael A. and Edward F. Nelling, “Market Making and Trading in Nasdaq Stocks”, Financial Review, 34（1999）, 27-44.

Henry, Peter Blair, “Stock Market Liberalization, Economic Reform, and Emerging Market Equity Prices”, Journal of Finance, 55（2000）, 529-64.

Holderness, Clifford G., Randall S. Kroszner, and Dennis P. Sheehan, “Were the Good Old Days That Good? Changes in Managerial Stock Ownership Since the Great Depression”, Journal of Finance, 54（1999）, 435-69.

Jennings, Robert and Laura Starks, “Earnings Announcements, Stock Price Adjustment, and the Existence of Option Markets”, Journal of Finance, 41（1986）, 107-25.

Kalay, Avner and Marti G. Subrahmanyam, “The Ex-Dividend Day Behavior of Option Prices”, Journal of Business, 57（1984）, 113-28.

Kumar, Raman, Atulya Sarin and Kuldeep Shastri, “The Behavior of Option Price around Large Block Transactions in the Underlying Security”, Journal of Finance, 47（1992）, 879-89.

Ness, Bonnie F. Van, Robert A. Van Ness, and Stephen W. Pruitt, “An Empirical Examination of the Nasdaq/CHX Dual-Trading Experiment”, Financial Review, 34（1999）, 65-77.

Ojah, Kalu and David Karemera, “Random Walks and Market Efficiency Tests of Latin American Emerging Equity Markets: A Revisit”, Financial Review, 34（1999）, 57-72.

Sorescu, Sorin M., “The Effect of Options on Stock Prices: 1973 to 1995”, Journal of Finance, 55（2000）, 487-514.